数理解析研究所講究録
466巻 1982年 107-128

Hamilton系の周期軌道と平均法について

東工大 理 伊藤秀一
Ito Hidekazu

§.1 序. Hamilton力学系の平衡点(Hamiltonベクトル場の特異点)の近傍における周期軌道の存在を考察しよう。$\mathbb{R}^{2m}$の原点 $z=(x,y)=0$ の近傍で定義されたHamilton系

$$
(1.1)\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial x_k} \qquad k=1,2,\cdots,m \\ H = H(z) = H_2 + H_3 + \cdots \in C^\infty, \quad H_j \text{ は } z \text{ の } j \text{次同次式}. \end{cases}
$$

を考える。ここで $\det S \neq 0$, $S = \mathrm{Hess}\, H_2$, と仮定する。原点=平衡点の近傍において周期軌道が存在するためには, (1.1)の linearized system

$$
(1.2) \qquad \dot{z} = Cz \quad ; \quad C = JS \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \ I = I_m : m\text{次単位行列}
$$

の係数行列 C の固有値 $\pm\lambda_1, \cdots, \pm\lambda_m$ の中に純虚なものが存在することが必要である。しかし十分ではない。(反例については[12]参照). この十分条件について, 次の結果が基本的である。

<u>定理</u>(Liapunov[8]) $C=JS$ の固有値を $\pm\lambda_1, \cdots, \pm\lambda_m$ とし

λ_1が純虚だとする。このとき，もし

(1.3) $\qquad \lambda_k/\lambda_1 \notin \mathbb{Z} \quad , \quad k=2,3,\cdots,m$

ならば，エネルギー値をパラメータとし，原点からbifurcateする(1.1)の周期軌道(最小周期$\sim 2\pi/|\lambda_1|$)の族が存在する。

ここで$\mathbb{Z}$は整数全体，記号$\sim$はエネルギー値を0に近づけたときその周期軌道の最小周期が$2\pi/|\lambda_1|$に収束することを表わす。(証明については[1, pp 498〜499]，または[16, §16]参照)

この定理の条件はnon-resonance条件とよばれる。この条件(1.3)がじっさいにきいてくる例をあげよう。

例[16, §16] $H = \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) - x_2^2 - y_2^2 + x_1y_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2)y_2$ なるHamiltonianで与えられる自由度2のHamilton系(1.1)を考える。$C=JS$の固有値は$\pm i$, $\pm 2i$だから$\pm 2i = \lambda_1$に対してはnon-resonance条件が成り立つ。いま，$x_1=y_1=0$とすると(1.1)の解は

(1.4) $\quad x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=\alpha\cos 2t-\beta\sin 2t$, $y_2=\alpha\sin 2t+\beta\cos 2t$
(α, βは定数)

なる最小周期πの周期解として解けてしまう。ところが，$p=x_1^2+y_1^2$，$q=x_2^2+y_2^2$ とおくと簡単な計算により

$$\ddot{p} = 4pq + p^2 \geqq 0$$

を得るから $p\neq 0\,(p>0)$ なる点を通る解はつねに$p>0$をみたすことに注意すると，そのような解はつねに$\ddot{p}>0$となり周

期的ではありえない。よってこの系の周期軌道は上で与えられる最小周期πなるもののみである。

原点の近傍で考えるとき，系(1.1)は線形系(1.2)を摂動したものと考えられるから，その周期軌道のうちで最小周期が(1.2)の周期軌道のものに近いようなものの存在を考えることは自然であろう。本稿の目的は，その中でLiapunovの定理によっては導くことのできないものの存在を保証することにある。

議論を明快にするため，時間tのscaleを適当にとることにより次のように仮定しよう。

$$
[A.1]\begin{cases} \mathbb{R}^{2m}=E\oplus F \ ; \ E, F \text{ は次の(i),(ii)をみたす } C\text{-不変部分空間} \\ \text{(i)} \quad C|_E \text{ の固有値は } \pm ip_k ,\ k=1,\cdots,n(\leqq m) \quad \text{ここで} \\ \qquad p_k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \text{s.t.} \quad G.C.D.(|p_1|,\cdots,|p_n|)=1 \\ \text{(ii)} \quad C|_F \text{ の固有値は } \pm i \text{ の整数倍ではない.} \end{cases}
$$

これは$\mathbb{R}^{2m}$を2つのC-不変部分空間に分解する方法を与えている。(G.C.D.は最大公約数を表わす)。この分解の仕方は時間tのscaleのとり方により幾通りもあり得る。$\dim E=2\ (n=1)$のときはnon-resonance条件にほかならない。

我々はこの仮定[A.1]において$n\geqq2$の場合につき，最小周期が2πに近い(1.1)の周期軌道の存在を議論する。ここで$n\geqq2$の場合

にはLiapunovの定理からは最小周期が2πに近い周期軌道は決して得られないことに注意する。

1970年代に入り、Liapunovの定理におけるnon-resonance条件の成り立たない場合、つまりresonance caseを扱った研究が盛んになった。その中で最も重要な結果のひとつはA.Weinsteinによって示された次の定理であろう。ここでは上の仮定[A.1]の下でJ.Moserにより一般化された形で述べよう。

<u>定理(Weinstein[17], [11])</u>　仮定[A.1]の下でHamilton系(1.1)を考える。もし2次形式H_2のEへの制限$H_2|E$が正定値であるならば、十分小なる任意の$\varepsilon>0$に対し、エネルギー曲面$H=\varepsilon$上に少なくともn個の周期$\sim 2\pi$なる周期軌道が存在する。

この結果はさらにFadell-Rabinowitz[5]によって一般化され、2次形式$H_2|E$の(正)定値性がなくとも、その符号数が0でなければ、原点の近傍において周期が2πに近い(1.1)の周期軌道が少なくとも(符号数)$\times\frac{1}{2}$個存在することが示された。

これらの結果はHamilton系(1.1)の周期軌道の存在するために、2次形式H_2のみたすべきnon-resonance条件にとってかわる条件を発見した点ですぐれているが、その周期軌道の周期の最小性まではわからない。また応用上、たとえば天体力学における平面三体問題のLagrangeの正三角形解の近くでの周期軌道の

存在などでは，これらの結果では扱えない場合に興味があると思われる（[9]，[16，§18]）。

ここでは，Hamiltonianの高次の項（H_3以降）に条件を課すことにより最小周期が2πに近い周期軌道の存在を示そう．それにより一般に，Liapunovの定理で与えられる周期軌道より長い最小周期をもつ周期軌道の存在が示せることになる。このような，高次項に対する条件は自由度2の系については調べられていたが[9,14]，一般自由度の系については複雑になりすぎるとみなされ研究されなかった。ここでは，次のような"higher-order resonance"の場合；

[A.2] $1 \leq \sum_{k=1}^{n} |j_k| \leq 4$ なる整数の組 $(j_1, \cdots, j_n)$ に対して $\sum_{k=1}^{n} j_k p_k \neq 0$

に制限した上で，平均法のテクニックを発展させることにより，求める条件を簡単な形で表現する。それは平均法を通じて，幾何的条件として，またHamiltonianのTaylor展開の係数に関する具体的な解析的条件としても記述される．

§2 平均法と non-degenerate critical torus

我々の存在定理は次節§3で述べられる。この§ではそのために必要な定義等の準備を行なう。まず，仮定[A.1]と[A.2]の下でHamiltonianを"標準形"にうつして考えよう。次がいえる。

補題1(標準形)　Hamilton系(1.1)において[A.1], [A.2]を仮定する。このとき、適当な正準変換 $(x, y) \longrightarrow (u, v, \xi, \eta)$; $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m-n}$, により(1.1)は次のような"標準形"にうつされる：

$$(2.1) \quad \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi};$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} H = H_2(u,v) + H_4(u,v) + \frac{1}{2}\langle B\zeta, \zeta\rangle + K(u,v,\xi,\eta)\text{; ここで} \\ H_2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \tau_k, \quad H_4 = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\tau_k\tau_l, \quad \tau_k = \frac{1}{2}(u_k^2 + v_k^2), \quad g_{kl}\text{は実定数,} \\ B\text{ は }2(m-n)\text{次実対称行列}, \quad \zeta = (\xi, \eta), \quad \langle\cdot,\cdot\rangle\text{ はユークリッド内積,} \\ K\text{ は } K(u,v,\xi^2,\eta^2) = O(|u|^5 + |v|^5 + |\xi|^5 + |\eta|^5)\text{ なる }C^\infty\text{関数} \end{cases}$$

この正準変換は 2-form $\sum_{k=1}^{m} dx_k \wedge dy_k$ を保つ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{m} dx_k \wedge dy_k = \sum_{k=1}^{n} du_k \wedge dv_k + \sum_{l=1}^{m-n} d\xi_l \wedge d\eta_l$$

なる意味である。この正準変換により，正準的部分空間 E, F はそれぞれ $\{(u, v, \xi, \eta) \mid \xi = \eta = 0\}$, $\{(u, v, \xi, \eta) \mid u = v = 0\}$ に対応する。Eにおいては，系(1.1)は $H_0 = H_2 + H_4$ を Hamiltonian とする積分可能系の摂動とみなされることがこの補題よりわかる。

証明の概略　詳細は[7]を参照していただくとして，ここでは概略を述べる。まず正準的線形変換により Hamiltonian の2次の項を $H_2(u, v) + \frac{1}{2}\langle B\zeta, \zeta\rangle$ の形にすることができる。この後，非線形な正準変換により H の4次の項までを標準化することにより(2.2)の形を得る。それには求める正準変換を母関数(4次の多項

式)で表示し，その係数を係数比較により逐次定めていけばよい。その際，[A.2]により u, v のみの項については H_2+H_4 なる τ_k のみの項が残るようにできる。一方[A.1]の(iii)により H の4次の項までに ξ, η について1次の項が残らないようにすることができる。よって(2.2)なるHamiltonianを得る。

さて，ここで H_2+H_4 の部分はBirkhoffの標準形と呼ばれるものであるが，Gustavson[6]が導入したように，仮定[A.2]がなくとも，H の u, v のみについての項 $H_2(u,v)+H_3(u,v)+H_4(u,v)+\cdots$ は

(2.3) $$DH_j=0 \quad (j=2,3,\cdots)\ ;\quad D=\sum_{k=1}^{n} p_k\Big(v_k\frac{\partial}{\partial u_k}-u_k\frac{\partial}{\partial v_k}\Big)$$

なるように正準変換を定めることができる。このとき，Gustavsonの標準形と呼ぶことがある。以下では E 上の関数(u, v についての関数) H をHamiltonianとする E 上のHamiltonベクトル場を一般に X_H とかくことにしよう。これは座標系を用いると

$$J\,\mathrm{grad}\,H=\Big(\frac{\partial H}{\partial v_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial v_n},-\frac{\partial H}{\partial u_1},\cdots,-\frac{\partial H}{\partial u_n}\Big)$$

で与えられる。ここで J は(1.2)における J で $m=n$ としたものである。(2.3)式の D は X_{H_2} に他ならない。(2.3)は H_j が X_{H_2} のflowの下で不変，すなわち，点 $w=(u,v)$ を通る X_{H_2} のflowを $\phi^t(w)$ とすると，

(2.4) $$H_j(\phi^t(w))=H_j(w) \qquad (j=2,3,\cdots)$$

を意味することに注意しよう。この意味で $H_3, H_4, \cdots$ は X_{H_2} に沿って"平均化"されるわけである。平均法[10]による周期軌道

の存在定理においては，critical circle の存在が重要であった。いま Gustavson の標準形 $H_2+H_3+\cdots$ において H_j $(j=3,\cdots)$ の中で $H_j\not\equiv 0$ なる最初のものを H_s とするとき，適当な実数 λ に対して

$$\text{(2.5)} \qquad \operatorname{grad} H_s = \lambda \operatorname{grad} H_2$$

となる関係は X_{H_2} の flow に沿って，つまり X_{H_2} の周期軌道に沿って成り立つことが (2.4) よりわかる。この周期軌道 γ のことを <u>H_s の (H_2 を法とする) critical circle</u> と呼ぶ。(2.5)式は幾何的には，γ に沿って X_{H_s} と X_{H_2} が平行となることを意味している。したがって γ は X_{H_2} および X_{H_s} の周期軌道である。そして X_{H_0}，$H_0=H_2+H_s$，の周期軌道でもある。

<u>例</u>　§1 で与えた例における自由度2の Hamiltonian は，Gustavson の標準形になっている。周期軌道 (1.4) は H_3 の critical circle であり，しかも (1.4) 以外には H_3 の critical circle は存在しないことが簡単な計算によりわかる。この意味で critical circle の存在が周期軌道の存在に本質的である例になっている。

仮定 [A.2] が加わったならば Gustavson の標準形は4次の項まで必然的に Birkhoff の標準形になる。このとき，$H_3\equiv 0$，H_4 ばかりか τ_k $(k=1,\cdots,n)$ も X_{H_2} に沿って"平均化"されてしまうことから，我々は次の定義に導かれる。

<u>定義1</u>　$\{1,\cdots,n\}$ の部分集合 N_+ $(\#N_+=r\geq 1)$ に対し，$N_0=$

$\{1,\cdots,n\}\setminus N_+$ とおく。(2.2) で与えられた H_2, H_4 を考える。

(2.6) Ω : $\tau_k = C_k (=\mathrm{const}) > 0$ $(k \in N_+)$, $u_\ell = v_\ell = 0$ $(\ell \in N_0)$, $\xi = \eta = 0$

で与えられる r-torus Ω が H_4 の(H_2 を法とする) critical r-torus であるとは, 適当な実数 λ に対し Ω 上で次の r 個の関係式が成り立つときをいう:

(2.7) $$\frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} = \lambda \frac{\partial H_2}{\partial \tau_k} (= \lambda p_k) \qquad (k \in N_+) .$$

ここで (2.7) は $H_s = H_4$ とするとき (2.5) が成り立つための条件にほかならない。このように Birkhoff の標準形の場合には, critical circle は必然的に critical r-torus でなければならなくなる。また, $r=1$ のときは (2.7) は必ず成り立つことから (2.6) で与えられる circle $(r=1)$ は必然的に H_4 の critical circle になる。

さて, 以下では標準形(2.1),(2.2) のみを考える。Ω を H_4 の critical r-torus (mod H_2) とする。Ω 上の X_{H_2} のすべての軌道は共通の最小周期をもつ周期軌道である。Ω 上において $X_{H_2} // X_{H_4}$ であることから, それらは, X_{H_0}, $H_0 = H_2 + H_4$, の周期軌道でもある。この各々の周期軌道 γ に associate した X_{H_0} の Poincaré map を考えよう。この線形部分は固有値として必ず 1 をもつ。平均法 [10] においては, この固有値 1 の重複度がちょうど 1 のとき critical circle γ は非退化であると呼び, 非退化 critical circle γ の存在は γ の近傍における (2.1) の周期軌道の存在を保証した。(ただし γ は原点の十分小さな近傍にあるとする). ところが, この γ に associate した X_{H_0} の Poincaré map を

$E_+=\{(u,v,\xi,\eta)\mid u_k=v_k=0\ (k\in N_0),\ \xi=\eta=0\}$ に制限すると，その線形部分の固有値はすべて1であることが計算によりわかる。したがって，$r\geqq 2$ のとき，我々の場合は平均法[10]における非退化条件をみたさない。そこで，我々の求める周期軌道は最小周期が2πに近いものであったことにも注意して，Ω の非退化条件を次のように定義しよう。

定義2　(2.6)で与えられる H_4 の critical r-torus (mod H_2) Ω が非退化(non-degenerate)であるとは，G.C.D.$(|p_k|\ ;\ k\in N_+)=1$ でありかつ次の2条件をみたすときをいう：

(2.8)　$\dfrac{\partial H_4}{\partial \tau_k}\neq\lambda\dfrac{\partial H_2}{\partial \tau_k}$　$(k\in N_0)$ が Ω 上で(2.7)のλに対し成り立つ。

(2.9)　$\det P_+\neq 0$　;　$P_+=\begin{pmatrix} q_{k\ell} & p_k \\ p_\ell & 0 \end{pmatrix}_{k,\ell\in N_+}$

ここで，Ω 上の X_{H_2} の軌道はすべて最小周期2πの周期軌道となる。(2.8)は，この周期軌道にassociateした X_{H_0} の Poincaré map を $E_0=\{(u,v,\xi,\eta)\mid u_k=v_k=0\ (k\in N_+),\ \xi=\eta=0\}$ に制限すると，その線形部分が固有値1をもたないことを意味している(§4でわかる)。なお $r=1$ ならば，(2.9)は除かれ，逆に $r=n$ ならば(2.8)が除かれる。

我々の目的は，ここで定義した H_4 の非退化 critical r-torus の存在が(2.1)の周期軌道の存在を保証することを示すことにある。この定理の定式化は次節にまわし，ここではいくつかの命題をあげ

ておく(証明略 [7]参照).

E上の1対1写像 ρ_ε ($\varepsilon>0$:パラメータ)を次のように定義しよう.

$$\rho_\varepsilon(u, v) = (\sqrt{\varepsilon}\, u, \sqrt{\varepsilon}\, v).$$

このとき,次がいえる.

<u>命題1.</u> 曲面 $H_2^{-1}(\varepsilon_0)\cap E$ 上に H_4 の critical r-torus Ω が存在すると仮定する. もし $\varepsilon_0 \neq 0$ ならば $\varepsilon\varepsilon_0 > 0$ なる任意の ε に対して, r-torus $\Omega_\varepsilon = \rho_{\varepsilon/\varepsilon_0}(\Omega)$ は $H_2^{-1}(\varepsilon)\cap E$ 上の H_4 の critical r-torus である。Ω が非退化ならば Ω_ε も非退化である.

したがって, $H_2^{-1}(0)\cap E$ 上にない, H_4 の critical torus はすべて,原点から bifurcate する 1-parameter family (パラメータは H_2 の値 ε)として存在する。

非退化条件 (2.8),(2.9) の幾何的意味は次のように理解される.

<u>命題2.</u> 曲面 $H_2^{-1}(\varepsilon)\cap E$ 上に H_4 の非退化 critical r-torus Ω_ε が存在するならば, Ω_ε はこの曲面上の他のすべての(H_4 の) critical torus から孤立している。

§.3 Main Theorems

我々が考察の対象を [A.2] で与えられる higher-order resonance の場合に制限した最大の利点は,次のように, §2で定義した非退化な critical r-torus の存在するための条件が H_2, H_4 の係数の間の関係式として explicit にかけることにある. このようなことは一般の critical circle を考えている限り,複雑すぎて望むべくもない.

定理1. $\{1,\cdots,n\}$の部分集合N_+ ($\#N_+=r\geqq 1$)を任意にとり，条件(2.9)を仮定する．このとき，曲面$H_2^{-1}(\varepsilon)\cap E$上に(2.6)で与えられる$H_4$のcritical r-torus Ω_εが存在するための必要十分条件は，

$$(2.10)\qquad (\det P_+)\times(\det Q_+^{(k)})\times\varepsilon < 0 \qquad (k\in N_+)$$

なるr個の不等式が成り立つことである。ここで$Q_+^{(k)}$は次の$r\times r$行列；

$$Q_+^{(k)}=(\hat{q}_{j\ell})\ ;\quad \hat{q}_{j\ell}=\begin{cases} q_{j\ell} & \ell\neq k \\ p_j & \ell=k \end{cases} \qquad (j,\ell\in N_+)$$

そして，このcritical r-torus Ω_εは次のように一意的に定まる。

$$\tau_k=-\frac{\det Q_+^{(k)}}{\det P_+}\cdot\varepsilon \quad (k\in N_+),\quad u_\ell=v_\ell=0 \quad (\ell\in N_0),\ \xi=\eta=0 \ .$$

さらに条件(2.8)は

$$(2.11)\qquad \sum_{\ell\in N_+}\left(q_{k\ell}-\frac{p_k}{p_\nu}q_{\nu\ell}\right)\det Q_+^{(\ell)}\neq 0 \qquad (k\in N_0)$$

とあらわされる。ここでνはN_+から任意にとり固定するものとする。

この定理により，曲面$H_2^{-1}(\varepsilon)\cap E$上に$H_4$の非退化critical r-torusが存在するのは条件(2.9)，(2.10)，(2.11)およびG.C.D.$\{|p_k|;k\in N_+\}=1$をみたすN_+ ($\#N_+=r$)が存在するときに限ることがわかる。定理の証明は省略する．([7]参照)．

我々の主張する存在定理は次のように述べられる．

定理2. Hamilton系(1.1)において[A.1]，[A.2]を仮定する。標準形(2.1)，(2.2)において，曲面$H_2^{-1}(1)\cap E$ (resp. $H_2^{-1}(-1)\cap E$)上に

H_4の非退化critical r-torus Ω が存在するとしよう。このとき，十分小なる任意の $\varepsilon>0$ に対し，エネルギー曲面 $H^{-1}(\varepsilon)$ (resp. $H^{-1}(-\varepsilon)$) 上に少なくとも r 個の (1.1) の周期軌道（最小周期 $\sim 2\pi$）が $\Omega_\varepsilon=\rho_\varepsilon(\Omega)$ の近くに存在する。

<u>注意</u>　より正確にいうと，定理で保証される周期軌道は Ω_ε の $o(\sqrt{\varepsilon})$ 近傍に含まれる。また最小周期は $2\pi+o(\sqrt{\varepsilon})$ となる。

この定理の適用例をあげておく。

<u>例</u>　自由度3のHamiltonian

$$H(x,y)=\tau_1-4\tau_2-10\tau_3+O(|x|^3+|y|^3),\quad \tau_k=\frac{1}{2}(x_k^2+y_k^2)\ (k=1,2,3)$$

で定義されるHamilton系(1.1)を考える。$C=JS$ の固有値は $\pm i$, $\pm 4i$, $\pm 10i$ であるから，線形系(1.2)の解の最小周期は 2π, $2\pi/4$, $2\pi/10$, および π である。この場合 $E=\mathbb{R}^6$ とすると[A.1], [A.2]が成り立つから，定理が適用でき，最小周期 $\sim 2\pi$ の周期軌道の存在が導ける。一方，最小周期 $\sim(1/2)\pi$ および $(1/5)\pi$ の周期軌道の存在がLiapunovの定理により得られる。さらに時間 t のscaleを $\hat{t}=2t$ に変えるとこのHamiltonianは $H(x,y)=\frac{1}{2}\tau_1-2\tau_2-5\tau_3+O(|x|^3+|y|^3)$ となり C の固有値は $\pm(1/2)i$, $\pm 2i$, $\pm 5i$ となる。このとき $E=\{(x,y)\mid x_1=y_1=0\}$, $F=\{(x,y)\mid x_2=y_2=x_3=y_3=0\}$ とすると[A.1], [A.2]が成り立つ，そして定理を適用すると，もとの時間scaleで最小周期 $\sim\pi$ なる周期軌道の存在が導ける。

§4　定理２の証明

定理２の主張するところは，最小周期〜2π なる周期軌道の bifurcate する様相が"非退化 critical torus"を通じて理解されるという点である．以下で定理２の証明の概略を述べる（[7]参照）

まず，原点を blow up するため，$\varepsilon>0$ を十分小なるパラメータとし，変換

$$u=\sqrt{\varepsilon}\,\hat{u}\ ,\quad v=\sqrt{\varepsilon}\,\hat{v}\ ,\quad \xi=\varepsilon\hat{\xi}\ ,\quad \eta=\varepsilon\hat{\eta}$$

を行って考える。ただし以下では notation を単純にするため，ε のかわりに ε^2 とし，$\hat{u}, \hat{v}, \hat{\xi}, \hat{\eta}$ のかわりに u, v, ξ, η とかくことにする．このとき，我々は標準形 (2.1), (2.2) を考えよう．Hamiltonian (2.2) は

$$
\begin{aligned}
&H(\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon^2\xi, \varepsilon^2\eta)=\varepsilon^2\hat{H}(u, v, \xi, \eta, \varepsilon)\ ;\\
(4.1)\qquad &\hat{H}(u, v, \xi, \eta, \varepsilon)=H^*(\tau, \varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{2}\langle B\zeta, \zeta\rangle+O(\varepsilon^3),\\
&H^*(\tau, \varepsilon)=H_2+\varepsilon^2H_4
\end{aligned}
$$

となり，Hamilton 系 (2.1) は次のようになる。

$$
(4.2)\qquad \begin{cases}
\dot{u}_k=\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial v_k}=\dfrac{\partial H^*}{\partial\tau_k}v_k+O(\varepsilon^3)\ ,\quad \dot{v}_k=-\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial u_k}=-\dfrac{\partial H^*}{\partial\tau_k}u_k+O(\varepsilon^3)\\
\dot{\zeta}=\varepsilon^{-2}J\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial\zeta}=JB\zeta+O(\varepsilon)\ ,\quad J=\begin{pmatrix}0 & I_{m-n}\\ -I_{m-n} & 0\end{pmatrix},\ (k=1,\cdots,n).
\end{cases}
$$

また，エネルギー曲面 $H=\varepsilon^2$ は $\hat{H}=1$ となり，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\hat{H}$ は系 (4.2) の第１積分である。以下では，一般性を失うことなく，非退化 critical r-torus Ω は $H_2^{-1}(1)\cap E$ 上にあり，その定義におい

て $N_+=\{1,\cdots,r\}$ であると仮定する. すなわち, Ω は次のように与えられる.

$$\Omega:\quad \tau_k=c_k>0\quad(k=1,\cdots,r),\ u_\ell=v_\ell=0\ (\ell=r+1,\cdots,n),\ \xi=\eta=0$$

Ω の($\mathbb{R}^{2m}$ における)近傍 $U(\Omega)$ を適当にとり, ε_0 を十分小さる正数とし, 系(4.2) の周期軌道の存在を $U(\Omega)\times\{\varepsilon \mid |\varepsilon|<\varepsilon_0\}$ において考えよう。そのため, 写像 φ_ε (Poincaré map) を次のように定義し, その周期点として求める周期軌道をとらえよう。まず, 横断面 Σ を,

$$\Sigma\ ;\quad v_1=0\ ,\ u_1>0$$

ととり, 近傍 $U(\Omega)$ を, $\Sigma\cap U(\Omega)$ 上に初期点をもつ (4.2) の解曲線が $2\pi/p_1$ に近い時刻に再び $\Sigma\cap U(\Omega)$ と交わるようにとる. ここで p_1 は $p_1>0$ と仮定して一般性を失なわない. $\Sigma_1=\Sigma\cap U(\Omega)\cap\hat{H}^{-1}(1)$ とし, この部分多様体 Σ_1' を適当にとると, 任意の $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ に対し, 写像

$$\varphi_\varepsilon:\Sigma_1'\longrightarrow\Sigma_1$$

が Σ_1' 上の点に対し, その点を通る解曲線が再び($t>0$ において) Σ_1 と交わる点を対応させることにより定義される。以下で, この写像の p 回 iteration を $\varphi_\varepsilon^{(p)}$ とかき, Σ_1' は $\varphi_\varepsilon^{(p)}$ が $p=1,2,\cdots,p_1$ に対し定義されるようにとるものとする。我々の目的は $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点を探すことにあり, それは (4.2) の最小周期が 2π に近い周期軌道の存在を与える。

この写像 φ_ε を実際に書き下すために, (4.2) において $O(\varepsilon^3), O(\varepsilon)$ の項を neglect して, つまり $\hat{H}$ のかわりに $H^*+\frac{\varepsilon^2}{2}\langle B\xi,\xi\rangle$ として系を積分すると, 複素変数 u_k+iv_k を導入して,

$$u_k(t)+iv_k(t)=\exp(-iH^*_{\tau_k}t)(u_k(0)+iv_k(0))\ ,\quad k=1,\cdots,n$$

$$\xi(t) = \exp(JBt)\xi(0)$$

となることに注意しよう．ここで $H^*_{\tau_k} = \partial H^*/\partial \tau_k$ へは $\tau_1(0), \cdots, \tau_n(0)$ を代入する。Σ_1' に初期点をもつこの解は時刻 $2\pi/H^*_{\tau_1} = 2\pi/p_1 + O(\varepsilon^2)$ において Σ_1 に再び交わることから，求める写像 $\varphi_\varepsilon^{(p)}$ を

$$\varphi_\varepsilon^{(p)} : (u, v, \xi) \longrightarrow (u^{(p)}, v^{(p)}, \xi^{(p)})$$

とかくと，これは次のように与えられる。

$$u_k^{(p)} + i v_k^{(p)} = \exp\left\{-2\pi i p \frac{H^*_{\tau_k}}{H^*_{\tau_1}}\right\}(u_k + i v_k) + O(\varepsilon^3), \quad k = 1, \cdots n$$

$$\xi^{(p)} = \exp\left(\frac{2\pi p}{H^*_{\tau_1}} JB\right)\xi + O(\varepsilon) .$$

ここで，$v_1 = v_1^{(p)} = 0$ であり，$u_1, u_1^{(p)} (>0)$ は $\hat{H} = 1$ により消去して考える。さらに，この写像の形を見やすくするため，(u_k, v_k) $(k=1, \cdots r)$ のかわりに極座標 (τ_k, θ_k) を．

$$u_k = \sqrt{2\tau_k}\cos\theta_k, \quad v_k = \sqrt{2\tau_k}\sin\theta_k \qquad k = 1, \cdots, r,$$

により導入する。これはもとの座標（stretchingをする前の座標）において考えれば正準変換である．Σ_1 において，$\theta_1 = 0 \pmod{2\pi}$ であり，$\tau_k > 0$ $(k=1, \cdots, r)$ と考えてよい．$\tau_1 > 0$ は $\hat{H} = 1$ により消去される．いま，

$$\frac{H^*_{\tau_k}}{H^*_{\tau_1}} = \frac{p_k}{p_1} + \frac{\varepsilon^2}{p_1}\left(\frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} - \frac{p_k}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1}\right) + O(\varepsilon^4)$$

に注意すると，$\varphi_\varepsilon^{(p)} : (\tau_k, \theta_k, u_\ell, v_\ell, \xi) \longrightarrow (\tau_k^{(p)}, \theta_k^{(p)}, u_\ell^{(p)}, v_\ell^{(p)}, \xi^{(p)})$ は

$$\left\{\begin{aligned} \tau_k^{(p)} &= \tau_k + O(\varepsilon^3) \\ \theta_k^{(p)} &= \theta_k + p\,\Psi_k(\tau, \theta, \varepsilon) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}\right. \qquad k = 2, \cdots, r,$$

(4.3)
$$\begin{cases} u_\ell^{(p)} = u_\ell \cos(p\Psi_\ell) - v_\ell \sin(p\Psi_\ell) + O(\varepsilon^3) \\ v_\ell^{(\ell)} = u_\ell \sin(p\Psi_\ell) + v_\ell \cos(p\Psi_\ell) + O(\varepsilon^3) \\ \xi^{(p)} = \exp\left(\frac{2\pi p}{p_1} JB\right)\xi + O(\varepsilon) \end{cases} \quad \ell = r+1, \cdots, n,$$

ただし

(4.4)
$$\Psi_k = \Psi_k(\tau, \theta, \varepsilon) = \frac{2\pi}{p_1}\left\{-p_k - \varepsilon^2\left(\frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} - \frac{p_k}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1}\right)\right\}$$
$$(k = 2, \cdots, n)$$

となる。ここで $\partial H_4/\partial\tau_1, \cdots, \partial H_4/\partial\tau_n$ においては，τ_1 は

$$\tau_1 = \frac{1}{p_1}\left(1 - \sum_{k=2}^{n} p_k \tau_k\right)$$

なる形に消去されているとする。

さて，$\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点の存在を得るためには，Ω が H_4 の非退化な critical r-torus であることが本質的に生かされる。それは次の補題がいえるという点においてである。

補題2　(4.3), (4.4) において $p = p_1$ として十分小なる任意の $\varepsilon > 0$ に対し，写像 $\varphi_\varepsilon^{(p_1)} : \Sigma_1' \longrightarrow \Sigma_1$ を考える。このとき Σ_1' 上の $(r-1)$次元 torus Λ_ε で，その上において

(4.5)
$$\begin{aligned} &\theta_k^{(p_1)} - \theta_k = 0 \pmod{2\pi} && k = 2, \cdots, r, \\ &u_\ell^{(p_1)} - u_\ell = 0, \quad v_\ell^{(p_1)} - v_\ell = 0 && \ell = r+1, \cdots, n, \\ &\xi^{(p_1)} - \xi = 0 \end{aligned}$$

となるものが，

(4.6)
$$\begin{cases} \tau_k = \tau_k(\theta, \varepsilon) = C_k + O(\varepsilon) & (k = 2, \cdots r) \\ u_\ell = u_\ell(\theta, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad v_\ell = v_\ell(\theta, \varepsilon) = O(\varepsilon) & (\ell = r+1, \cdots, n) \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} \zeta = \zeta(\theta, \varepsilon) = O(\varepsilon) \\ \text{ここで}\ \ \theta = (\theta_2, \cdots, \theta_r). \end{array}\right.$$

なる形で存在する。

証明　(4.3), (4.4) より (4.5) となるためには,

$$\frac{-1}{2\pi\varepsilon^2}(\theta_k^{(p_1)} - \theta_k) = \frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} - \frac{p_k}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1} + O(\varepsilon) = 0 \qquad k = 2, \cdots r$$

$$(4.7)\quad \begin{aligned} &\frac{-1}{2\pi\varepsilon^2}(u_l^{(p_1)} - u_l) = -\left(\frac{\partial H_4}{\partial \tau_l} - \frac{p_l}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1}\right)v_l + O(\varepsilon) = 0 \\ &\frac{-1}{2\pi\varepsilon^2}(v_l^{(p_1)} - v_l) = \left(\frac{\partial H_4}{\partial \tau_l} - \frac{p_l}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1}\right)u_l + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \qquad l = r+1, \cdots, n$$

$$\zeta^{(p_1)} - \zeta = \{\exp(2\pi JB) - I_{2(m-n)}\}\zeta + O(\varepsilon) = 0$$

であればよい。これは陰関数系として, $\tau_2, \cdots, \tau_r, u_{r+1}, \cdots u_n, v_{r+1}, \cdots, v_n, \zeta$ について解くことができる。じっさい, $\varepsilon = 0$ とすると (4.7) は $r-1$ 次元torus $\Omega \cap \Sigma_1$ 上に成り立つことが critical r-torus の定義から従う. すなわち, (2.7) をみたす実数 λ が存在するのは,

$$\frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} - \frac{p_k}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1} = 0 \qquad k = 2, \cdots, r$$

のときである. 一方 Ω の非退化条件 (2.8), (2.9) は それぞれ

$$\frac{\partial H_4}{\partial \tau_l} - \frac{p_l}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1} \neq 0 \qquad l = r+1, \cdots, n$$

$$\det\left\{\frac{\partial}{\partial \tau_l}\left(\frac{\partial H_4}{\partial \tau_k} - \frac{p_k}{p_1}\frac{\partial H_4}{\partial \tau_1}\right)\right\}_{k,l=2,\cdots,r} \neq 0$$

を意味することが簡単な計算によりわかる. また [A.1] の(ii) より

$$\det\{\exp(2\pi JB) - I_{2(m-n)}\} \neq 0$$

もわかる。よって (4.7) は $\Omega \cap \Sigma_1$ 上において Jacobian が消えない。ゆえに (4.7) は陰関数定理により (4.6) なる形に解ける。

さて，$(r-1)$-torus Λ_ε 上の $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点の存在を議論しよう。$p=1,\cdots,p_1-1$ に対しては Λ_ε 上に $\varphi_\varepsilon^{(p)}$ の不動点は存在しないことから，$\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点は $\hat{H}=1$ 上の最小周期が 2π に近い，求める周期軌道を定義することに注意しよう。補題2により，そのためには Λ_ε 上において $\tau_k^{(p_1)}-\tau_k=0$ $(k=2,\cdots,r)$ となる点 $\theta=(\theta_2,\cdots,\theta_r)$ を探せばよい。このとき，写像 φ_ε つまり $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ が正準的であることが生きてくる（ただし stretching を行なう前のもとの座標で考えて）この事実はよく知られたものであり，Poincaré-Cartan の定理より従う [2]。すなわち，次がいえる。

<u>補題3</u>　Σ_1' 上の任意の閉曲線 γ に対し，積分

$$(4.8)\qquad \varepsilon^2\int_\gamma \sum_{k=2}^{r}\tau_k\,d\theta_k + \varepsilon^2\int_\gamma \sum_{k=r+1}^{n}u_k\,dv_k + \varepsilon^4\int_\gamma \sum_{k=1}^{m-n}\xi_k\,d\eta_k$$

は写像 $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の下で不変である。

さて，閉曲線 γ をとくに Λ_ε 上にとろう。このとき，積分 (4.8) の3つの積分のうち，第2，第3のものは $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の下で不変であるから，Λ_ε 上の任意の閉曲線 γ に対し積分

$$\int_\gamma \sum_{k=2}^{r}\tau_k\,d\theta_k$$

が $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の下で不変である。このことは，

$$\int_\gamma \sum_{k=2}^{r} (\tau_k^{(p_1)} d\theta_k^{(p_1)} - \tau_k d\theta_k) = 0$$

を意味する。ここで，Λ_ε 上において $\theta_k^{(p_1)} = \theta_k \pmod{2\pi}$ だから，$d\theta_k^{(p_1)} = d\theta_k$ $(k=2,\cdots,r)$ であることに注意すると，

$$\int_\gamma \sum_{k=2}^{r} (\tau_k^{(p_1)} - \tau_k) d\theta_k = 0$$

が Λ_ε 上の任意の閉曲線 γ に対して成り立つことがわかる。よって

$$W(\theta) = \int_0^\theta \sum_{k=2}^{r} (\tau_k^{(p_1)} - \tau_k) d\theta_k \quad , \quad \theta = (\theta_2, \cdots, \theta_r)$$

なる積分は積分路のとり方によらず，したがって $(r-1)$-torus Λ_ε 上の C^∞ 関数（$\theta_2, \cdots \theta_r$ について周期 2π）を定義する。しかも $W(\theta) = W(\theta, \varepsilon)$ は

$$\tau_k^{(p_1)} - \tau_k = \frac{\partial W}{\partial \theta_k}, \qquad k = 2, \cdots, r,$$

をみたす。ゆえに Λ_ε 上の $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点の存在は Λ_ε 上の $W(\theta)$ の critical point（臨界点）の存在に帰着する。ところが，よく知られているように[15]，$(r-1)$-torus 上の C^∞ 関数は少なくとも r 個の幾何的に異なる critical point をもつ（Lusternik-Schnirelman の Category theory）。よって，Λ_ε 上には少なくとも r 個の $\varphi_\varepsilon^{(p_1)}$ の不動点が存在することになり，それらは $\hat{H}=1$ 上の (4.2) の最小周期 $\sim 2\pi$ の周期軌道を与える。$\varepsilon > 0$ の任意性より，定理の証明がこれで完了する。

以上のように正準写像の不動点の存在をトーラス上の critical

pointの存在に帰着するアイデアは Poincaré[13] にさかのぼり, Birkhoff[3,4]により発展させられたものである。これについては Arnold の解説(Appendix 9 [2])も参照されたい。また変分原理との関係につき[18]も参照されたい。

参考文献

[1] R. Abraham & J.E. Marsden, "Foundations of Mechanics" 2nd-Edition, Benjamin/Cummings, New York 1978.

[2] V.I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics," Springer, 1978.

[3] G.D. Birkhoff, "Dynamical Systems", A.M.S. Colloq. Publ, 1966

[4] ——————, On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system, Ann. Mat. Pura Appl. 12 (1933), 117–133.

[5] E.R. Fadell & P.H. Rabinowitz, Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems, Invent. Math. 45 (1978), 134–174.

[6] F. Gustavson, On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point, Astronomical J. 71 (1966) 670–686.

[7] H. Ito, Long periodic orbits near an equilibrium and the averaging method in higher-order resonances, to appear.

[8] M.A. Liapounoff, *Problème general de la stabilité du mouvement*, Princeton Univ Press, (1949), 375 – 392.

[9] K.R. Meyer & J.I. Palmore, *A new class of periodic solutions in the restricted three body problem*, J. Diff Eqs 8 (1970) 264–276.

[10] J. Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 609–636.

[11] ______, *Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 727 – 747.

[12] ______, Addendum to [11], ibid 31 (1978), 529 – 530.

[13] H. Poincaré, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" vol. 3, Gauthier-Villars, 1899, Chap. 28.

[14] D.S. Schmidt & D. Sweet, *A unifying theory in determining periodic families for Hamiltonian systems at resonance*, J. Diff Eqs 14 (1973), 597 – 609.

[15] J.T. Schwartz, "Nonlinear Functional Analysis", Gordon-Breach 1969.

[16] C.L. Siegel & J.K. Moser, "Lectures on Celestial Mechanics", Springer, 1971.

[17] A. Weinstein, *Normal modes for non-linear Hamiltonian systems*, Invent. Math. 45 (1973), 47 – 57.

[18] ________, *Bifurcation and Hamilton's principle*, Math. Z. 159 (1978), 235 – 248.